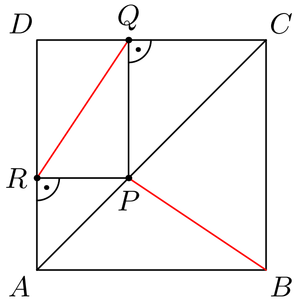
Cechy przystawania trójkątów

1. Punkt P leży na przekątnej AC kwadratu $ABCD$ (rys. 1). Punkty Q i R są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na proste CD i DA. Wykazać, że $BP = RQ$.

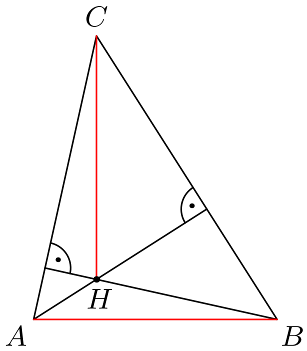


rys. 1

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, przy czym

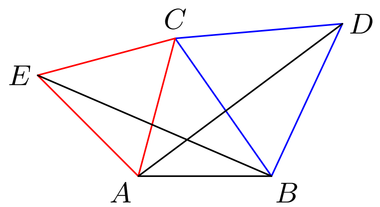
$$\sphericalangle ACB = 45^\circ .$$

Wysokości trójkąta ABC przecinają się w punkcie H (rys. 2). Wykazać, że $CH = AB$.



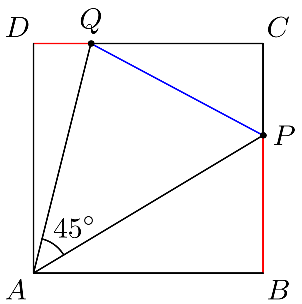
rys. 2

3. Na bokach BC, CA i AB trójkąta ABC zbudowano po jego zewnętrznej stronie trójkąty równoboczne BCD, CAE i ABF (rys. 3). Wykazać, że $AD = BE$.



rys. 3

4. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$, przy czym $\sphericalangle PAQ = 45^\circ$ (rys. 4). Dowieść, że $BP + DQ = PQ$.

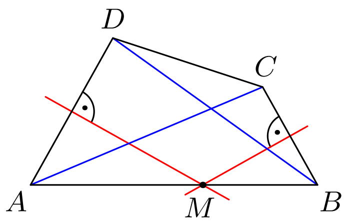


rys. 4

5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

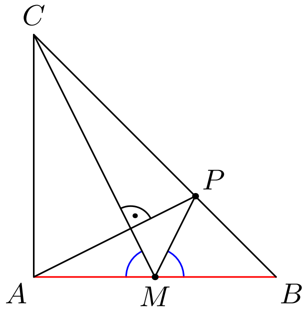
$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC .$$

Symetralne odcinków AD i BC przecinają się w punkcie M leżącym na odcinku AB (rys. 5). Udowodnić, że $AC = BD$.



rys. 5

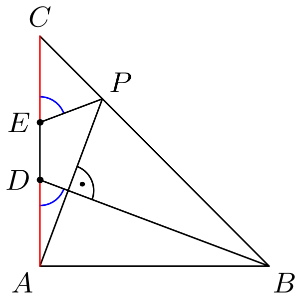
6. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle A = 90^\circ$ oraz $AB = AC$ (rys. 6). Punkt M jest środkiem boku AB. Prosta przechodząca przez punkt A i prostopadła do prostej CM przecina bok BC w punkcie P. Wykazać, że $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMP$.



rys. 6

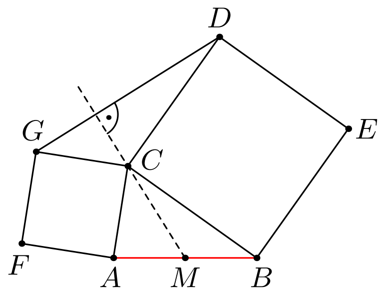
7. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle A = 90^\circ$ oraz $AB = AC$ (rys. 7). Punkty D i E leżą na boku AC, przy czym $AD = CE$. Prosta przechodząca przez punkt A i prostopadła do prostej BD przecina bok BC w punkcie P. Wykazać, że

$$\sphericalangle PEC = \sphericalangle BDA\,.$$



rys. 7

8. Na bokach BC i CA trójkąta ABC zbudowano po jego zewnętrznej stronie kwadraty $BCDE$ oraz $CAFG$ (rys. 8). Prosta przechodząca przez punkt C i prostopadła do prostej DG przecina odcinek AB w punkcie M. Udowodnić, że $AM = MB$.

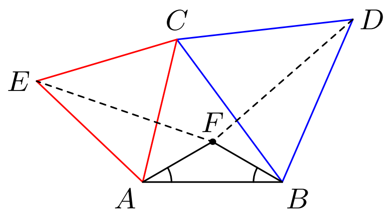


rys. 8

9. Na bokach BC, CA i AB trójkąta ABC zbudowano po jego zewnętrznej stronie trójkąty równoboczne BCD, CAE i ABF (rys. 9). Na boku AB zbudowano po wewnętrznej stronie trójkąta ABC taki trójkąt ABF, że

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle ABF = 30^\circ\,.$$

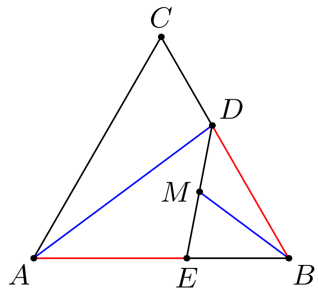
Dowieść, że $DF = EF$.



rys. 9

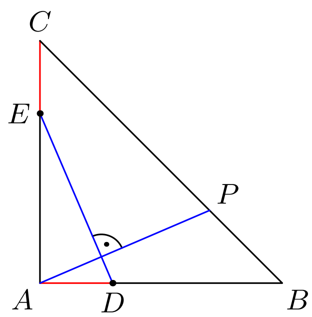
10. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AB trójkąta równobocznego ABC, przy czym $BE = CD$ (rys. 10). Punkt M jest środkiem odcinka DE. Wykazać, że

$$BM = \tfrac{1}{2}\,AD\,.$$



rys. 10

11. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle A = 90^\circ$ oraz $AB = AC$ (rys. 11). Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC, przy czym $AD = CE$. Prosta przechodząca przez punkt A i prostopadła do prostej DE przecina bok BC w punkcie P. Wykazać, że $AP = DE$.

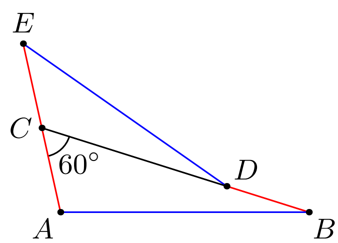


rys. 11

12. Dany jest trójkąt ABC, w którym

$$\sphericalangle ACB = 60^\circ \quad \text{oraz} \quad AC < BC\,.$$

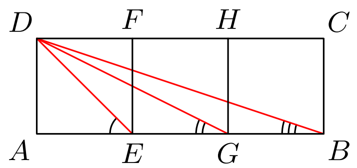
Punkt D leży na boku BC, przy czym $BD = AC$ (rys. 12). Punkt E jest punktem symetrycznym do punktu A względem punktu C. Udowodnić, że $AB = DE$.



rys. 12

13. Prostokąt $ABCD$, w którym $AB = 3 \cdot AD$ podzielono na trzy kwadraty: $AEFD$, $EGHF$ oraz $GBCH$ (rys. 13). Wykazać, że

$$\sphericalangle AED + \sphericalangle AGD + \sphericalangle ABD = 90^\circ\,.$$

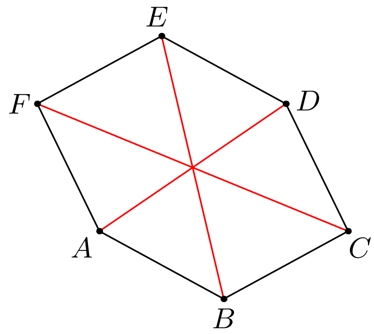


rys. 13

14. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wszystkie boki są równej długości oraz

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = \sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F\,.$$

Dowieść, że przekątne AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

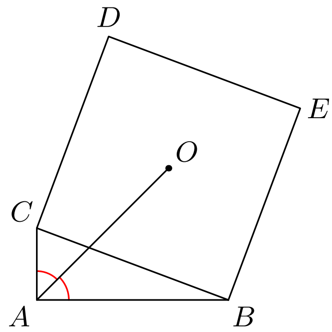


rys. 14

Kąty w okręgu

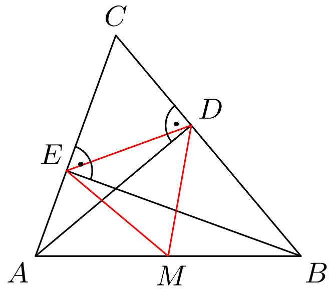
15. Na przeciwprostokątnej BC trójkąta prostokątnego ABC zbudowano po zewnętrznej stronie kwadrat $BCDE$ (rys. 15). Niech O będzie środkiem tego kwadratu. Wykazać, że

$$\sphericalangle BAO = \sphericalangle CAO\,.$$



rys. 15

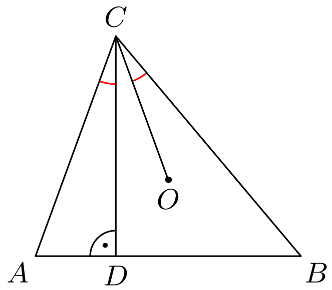
16. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, przy czym $\sphericalangle ACB = 60°$ (rys. 16). Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na proste BC i AC. Punkt M jest środkiem boku AB. Wykazać, że trójkąt DEM jest równoboczny.



rys. 16

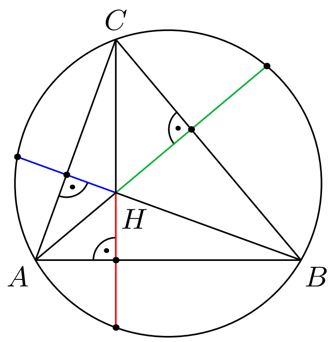
17. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC (rys. 17). Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB. Wykazać, że

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCO\,.$$



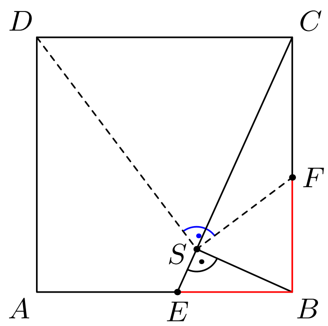
rys. 17

18. Punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ostrokątnego ABC (rys. 18). Wykazać, że punkty symetryczne do punktu H względem prostych AB, BC, CA leżą na okręgu opisanym na trójkącie ABC.



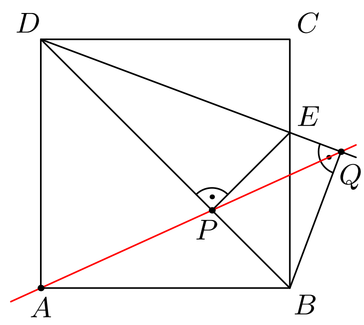
rys. 18

19. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$, przy czym $BE = BF$ (rys. 19). Punkt S jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą CE. Wykazać, że $\sphericalangle DSF = 90°$.



rys. 19

20. Punkt E leży na boku BC kwadratu $ABCD$ (rys. 20). Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów E i B odpowiednio na proste BD i DE. Dowieść, że punkty A, P, Q leżą na jednej prostej.



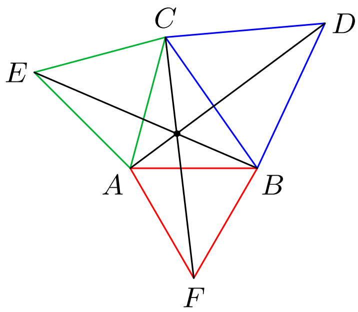
rys. 20

21. Na bokach BC, CA i AB trójkąta ABC zbudowano po jego zewnętrznej stronie trójkąty równoboczne BCD, CAE i ABF (rys. 21). Wykazać, że:

(a) $AD = BE = CF$.

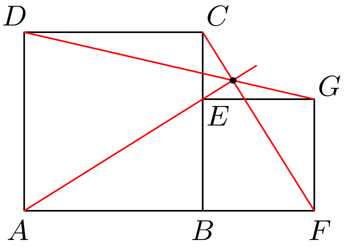
(b) Proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

(Punkt wspólny prostych AD, BE i CF nazywa się *punktem Toriciellego* trójkąta ABC.)



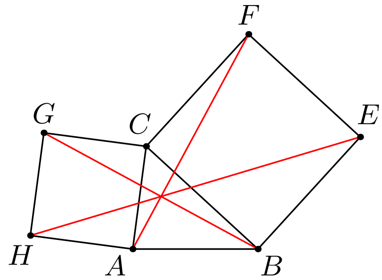
rys. 21

22. Punkt E leży na boku BC kwadratu $ABCD$. Czworokąt $BFGE$ jest kwadratem zbudowanym na zewnątrz kwadratu $ABCD$ (rys. 22). Wykazać, że proste AE, CF i DG przecinają się w jednym punkcie.



rys. 22

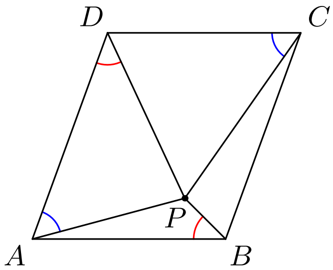
23. Na bokach BC i AC trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano, po zewnętrznej stronie, kwadraty $BCFE$ i $ACGH$ (rys. 23). Udowodnić, że proste AF, BG i EH przecinają się w jednym punkcie.



rys. 23

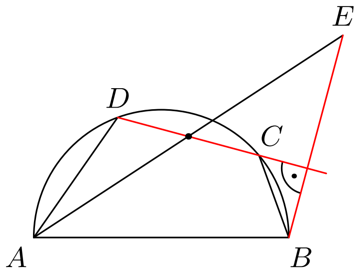
24. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ADP$ (rys. 24). Dowieść, że

$$\sphericalangle DAP = \sphericalangle DCP.$$



rys. 24

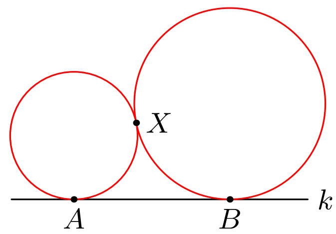
25. Na czworokącie $ABCD$ jest opisany okrąg o średnicy AB (rys. 25). Punkt E jest symetryczny do punktu A względem środka odcinka CD. Dowieść, że proste CD i BE są prostopadłe.



rys. 25

Styczna do okręgu

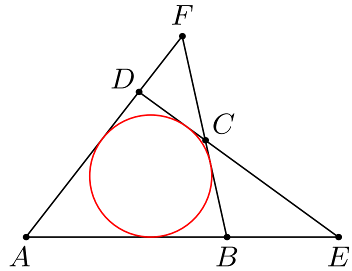
26. Ustalone punkty A i B leżą na prostej k. Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie w punkcie X (rys. 26). Okręgi te są również styczne do prostej k odpowiednio w punktach A i B. Wyznaczyć zbiór punktów X.



rys. 26

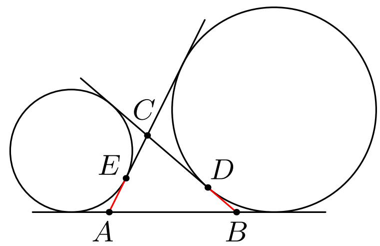
27. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Proste AB i CD przecinają się w punkcie E, a proste AD i BC przecinają się w punkcie F (rys. 27). Udowodnić, że w czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z warunków:

(a) $AE+CF=AF+CE$
(b) $BE+BF=DE+DF$.



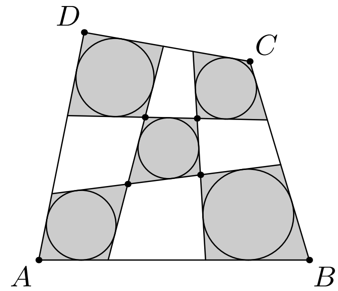
rys. 27

28. Okręgi dopisane do trójkąta ABC są styczne do boków BC i AC odpowiednio w punktach D i E (rys. 28). Wykazać, że $BD=AE$.



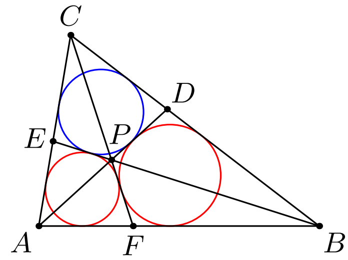
rys. 28

29. Czworokąt wypukły $ABCD$ podzielno na dziewięć czworokątów, jak pokazano na rysunku 29. Udowodnić, że jeśli w zacieniowane czworokąty można wpisać okręgi, to również w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.



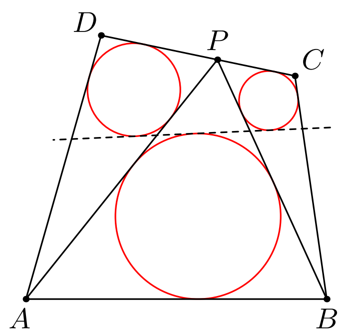
rys. 29

30. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Odcinki AD, BE i CF przecinają się w punkcie P (rys. 30). Wykazać, że jeśli w czworokąty $AFPE$ i $FBDP$ można wpisać okręgi, to również w czworokąt $DCEP$ można wpisać okrąg.



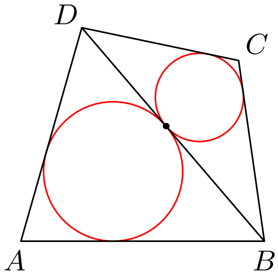
rys. 30

31. W czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać okrąg. Punkt P leży na odcinku CD. Wykazać, że istnieje wspólna styczna do okręgów wpisanych w trójkąty ABP, BCP i DAP (rys. 31).



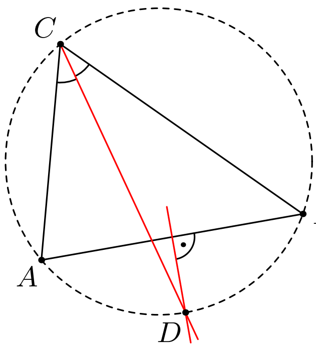
rys. 31

32. Udowodnić, że w czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi wpisane w trójkąty ABD i BCD są styczne (rys. 32).



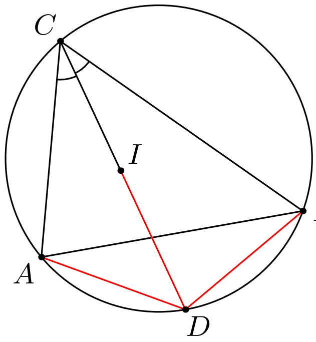
rys. 32

33. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC \neq BC$ (rys. 33). Dwusieczna kąta ACB oraz symetralną odcinka AB przecinają się w punkcie D. Wykazać, że punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu.



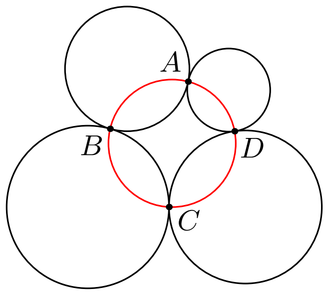
rys. 33

34. Dany jest trójkąt ABC. Dwusieczna kąta ACB przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie D (rys. 34). Punkt I leży na odcinku CD. Wykazać, że punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC wtedy i tylko wtedy, gdy $AD = BD = ID$.



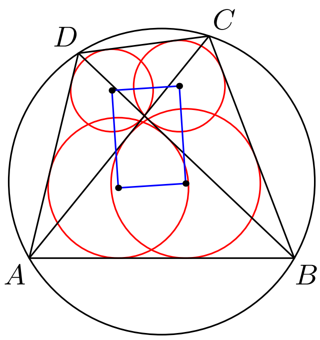
rys. 34

35. Cztery okręgi są styczne zewnętrznie w punktach A, B, C, D, jak pokazano na rysunku 35. Wykazać, że punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu.



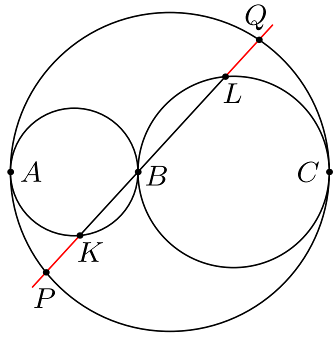
rys. 35

36. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Udowodnić, że środki okręgów wpisanych w trójkąty BCD, CDA, DAB oraz ABC są wierzchołkami prostokąta (rys. 36).



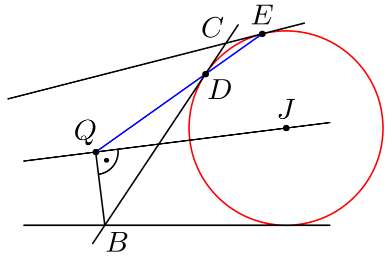
rys. 36

37. Okręgi o_1 i o_2 odpowiednio o średnicach AB i BC są styczne zewnętrznie w punkcie B. Prosta przechodząca przez punkt B przecina okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach K i L. Prosta KL przecina okrąg o średnicy AC w punktach P i Q (rys. 37). Wykazać, że $KP = LQ$.



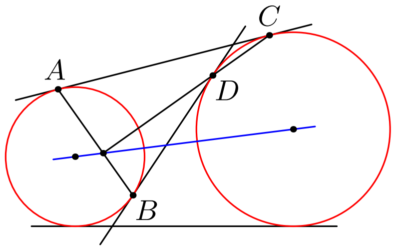
rys. 37

38. Okrąg o środku J, dopisany do trójkąta ABC, jest styczny do boku BC w punkcie D oraz jest styczny do prostej AC w punkcie E (rys. 38). Punkt Q jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą AJ. Wykazać, że punkty D, E, Q leżą na jednej prostej.



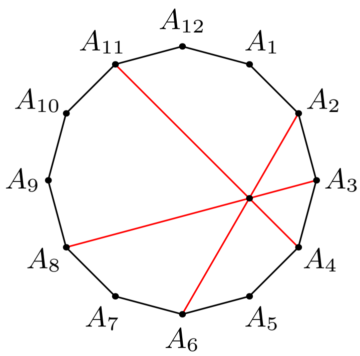
rys. 38

39. Okręgi o_1 i o_2 są rozłączne zewnętrznie. Dwie wspólne styczne do tych okręgów – jedna wewnętrzna, druga zewnętrzna – są styczne do okręgu o_1 w punktach A i B, a do okręgu o_2 w punktach C i D (rys. 39). Wykazać, że proste AB i CD przecinają się na prostej łączącej środki okręgów o_1 i o_2.



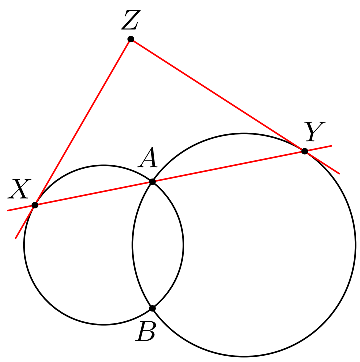
rys. 39

40. Wykazać, że w dwunastokącie foremnym $A_1A_2\ldots A_{12}$ przekątne A_2A_6, A_3A_8 oraz A_4A_{11} przecinają się w jednym punkcie (rys. 40).



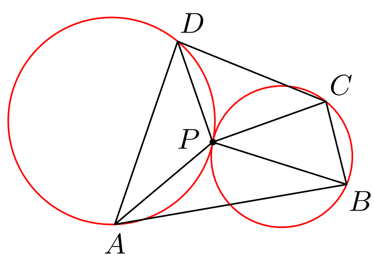
rys. 40

41. Dwa ustalone okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Prosta k przechodzi przez punkt A i przecina okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach X i Y (rys. 41), przy czym punkt X leży na zewnątrz okręgu o_2, a punkt Y na zewnątrz okręgu o_1. Styczne do okręgów o_1 i o_2 w punktach X i Y przecinają się w punkcie Z. Dowieść, że miara kąta XZY nie zależy od wyboru prostej k.



rys. 41

42. Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym $\sphericalangle BCP + \sphericalangle ADP = \sphericalangle APB$. Wykazać, że okręgi opisane na trójkątach BCP i ADP są styczne (rys. 42).

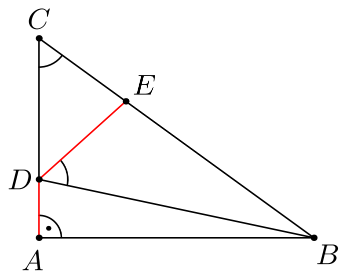


rys. 42

43. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle BAC = 90°$ (rys. 43). Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AC i BC, przy czym

$$\sphericalangle BDE = \sphericalangle ACB \quad \text{oraz} \quad DE = 2 \cdot AD\,.$$

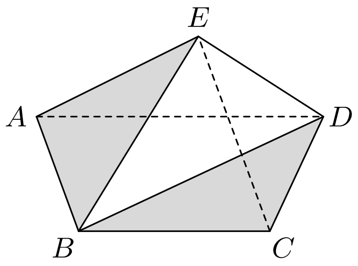
Wykazać, że $\sphericalangle ABD = \frac{1}{3} \sphericalangle ABC$.



rys. 43

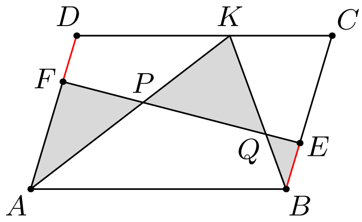
Pole

44. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym przekątna AD jest równoległa do boku BC, a przekątna CE jest równoległa do boku AB (rys. 44). Wykazać, że pola trójkątów ABE i BCD są równe.



rys. 44

45. Punkty E i F leżą na bokach BC i DA równoległoboku $ABCD$, przy czym $BE = DF$. Punkt K leży na boku CD. Prosta EF przecina odcinki AK i BK odpowiednio w punktach P i Q (rys. 45). Wykazać, że suma pól trójkątów APF i BQE jest równa polu trójkąta KPQ.

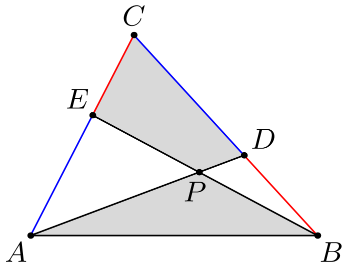


rys. 45

46. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i CA trójkąta ABC, przy czym

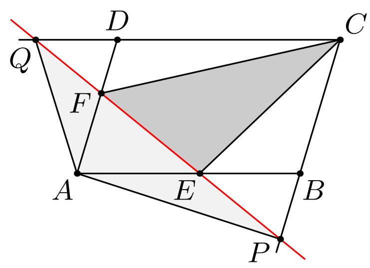
$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA}\,.$$

Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P (rys. 46). Wykazać, że pole czworokąta $EPDC$ jest równe polu trójkąta ABP.



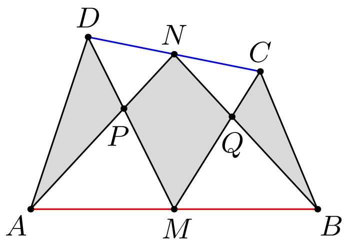
rys. 46

47. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkt E należy do boku AB, a punkt F do boku AD (rys. 47). Prosta EF przecina prostą CB w punkcie P, a prostą CD w punkcie Q. Wykazać, że pole trójkąta CEF jest równe polu trójkąta APQ.



rys. 47

48. Punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD czworokąta wypukłego $ABCD$. Odcinki AN i DM przecinają się w punkcie P, odcinki BN i CM przecinają się w punkcie Q (rys. 48). Wykazać, że suma pól trójkątów ADP i BCQ jest równa polu czworokąta $MPNQ$.

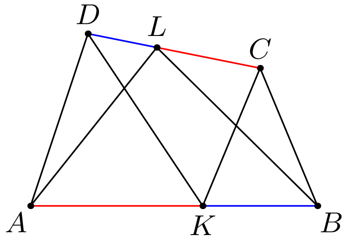


rys. 48

49. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach AB i CD czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym

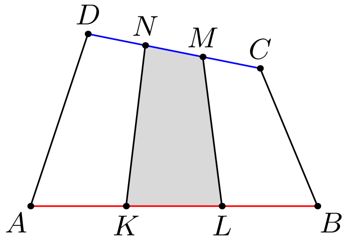
$$\frac{AK}{KB} = \frac{CL}{LD}.$$

Udowodnić, że suma pól trójkątów ABL i CDK równa się polu czworokąta $ABCD$ (rys. 49).



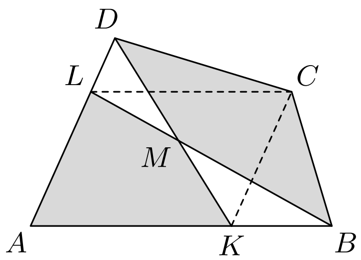
rys. 49

50. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K, L leżą na boku AB, przy czym $AK = KL = LB$, a punkty M, N leżą na boku CD, przy czym $CM = MN = ND$ (rys. 50). Wykazać, że pole czworokąta $KLMN$ jest równe 1/3 pola czworokąta $ABCD$.



rys. 50

51. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L leżą odpowiednio na odcinkach AB i AD, przy czym czworokąt $AKCL$ jest równoległobokiem (rys. 51). Odcinki KD i BL przecinają się w punkcie M. Wykazać, że pola czworokątów $AKML$ i $BCDM$ są równe.



rys. 51

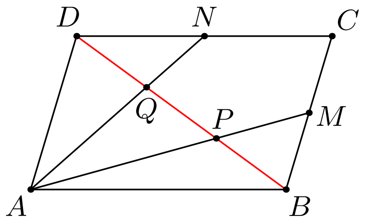
52. Dany jest sześciokąt wypukły. Każdy z trzech odcinków łączących środki przeciwległych boków tego sześciokąta dzieli go na dwa pięciokąty o równych polach. Dowieść, że te trzy odcinki przecinają się w jednym punkcie.

53. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Wykazać, że pole jednego z trójkątów ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB nie przekracza 1/6 pola sześciokąta $ABCDEF$.

54. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$. Wykazać, że suma pól pewnych czterech spośród trójkątów ABC, BCD, CDE, DEA, EAB jest większa od pola pięciokąta $ABCDE$.

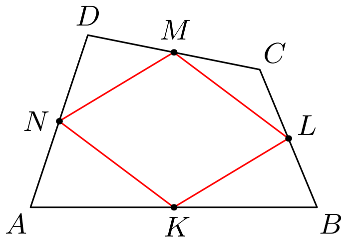
Twierdzenie Talesa

55. Punkty M i N są odpowiednio środkami boków BC i CD równoległoboku $ABCD$. Odcinki AM i AN przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach P i Q (rys. 55). Wykazać, że $BP=PQ=QD$.



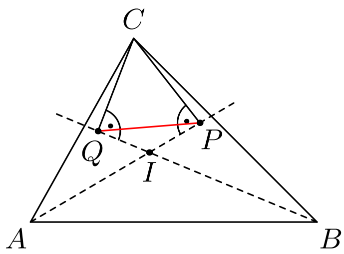
rys. 55

56. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$ (rys. 56). Dowieść, że czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem, którego pole jest równe połowie pola czworokąta $ABCD$.



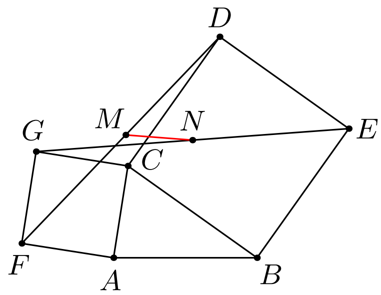
rys. 56

57. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu C odpowiednio na proste AI i BI (rys. 57). Znając długości boków trójkąta ABC obliczyć długość odcinka PQ.



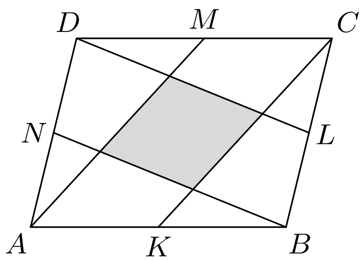
rys. 57

58. Na bokach BC i CA trójkąta ABC zbudowano po jego zewnętrznej stronie kwadraty $BCDE$ oraz $CAFG$ (rys. 58). Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DF i EG. Znając długości boków trójkąta ABC obliczyć długość odcinka MN.



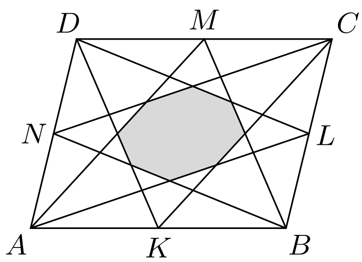
rys. 58

59. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA równoległoboku $ABCD$ (rys. 59). Znając pole równoległoboku $ABCD$ obliczyć pole czworokąta ograniczonego prostymi AM, BN, CK, DL.



rys. 59

60. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA równoległoboku $ABCD$ (rys. 60). Znając pole równoległoboku $ABCD$ obliczyć pole ośmiokąta ograniczonego prostymi AM, MB, BN, NC, CK, KD, DL, LA.



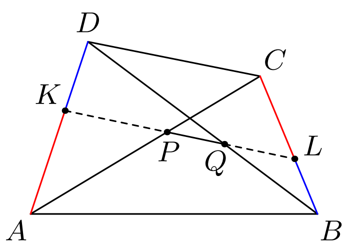
rys. 60

61. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach AD i BC czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym

$$\frac{AK}{KD}=\frac{CL}{LB}.$$

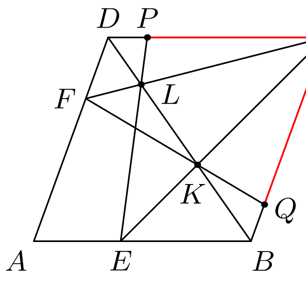
Prosta KL przecina odcinki AC i BD odpowiednio w punktach P i Q (rys. 61). Dowieść, że

$$\frac{KP}{QL}=\frac{[ACD]}{[BCD]}.$$



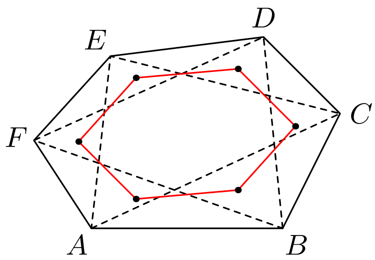
rys. 61

62. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i AD rombu $ABCD$ (rys. 62). Proste CE i CF przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach K i L. Proste EL i FK przecinają boki CD i CB odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że $CP = CQ$.



rys. 62

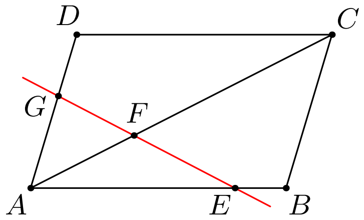
63. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$ (rys. 63). Dowieść, że przeciwległe boki sześciokąta wypukłego, którego wierzchołkami są środki ciężkości trójkątów ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB są równoległe i równej długości.



rys. 63

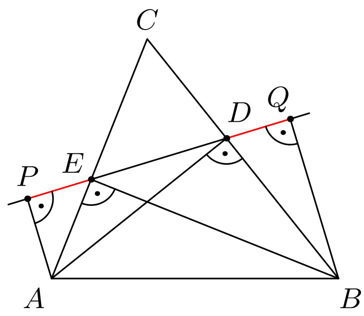
64. Dany jest równoległobok $ABCD$ (rys. 64). Pewna prosta przecina odcinki AB, AC, AD odpowiednio w punktach E, F, G. Dowieść, że

$$\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AG} = \frac{AC}{AF}.$$



rys. 64

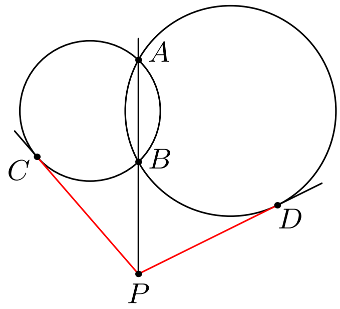
65. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi punktów A i B odpowiednio na proste BC i CA (rys. 65). Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na prostą DE. Dowieść, że $PE = DQ$.



rys. 65

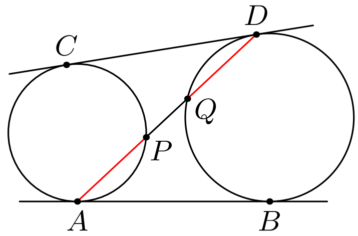
Cechy podobieństwa trójkątów
Pola figur podobnych

66. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Punkt P leży na prostej AB i na zewnątrz obu okręgów (rys. 66). Przez punkt P poprowadzono proste styczne do okręgów o_1 i o_2 odpowiednio w punktach C i D. Wykazać, że $PC = PD$.



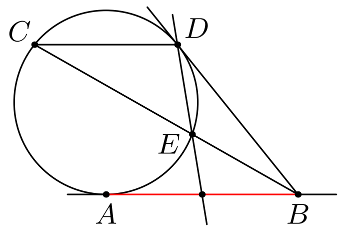
rys. 66

67. Okręgi o_1 i o_2 są rozłączne zewnętrznie. Wspólna styczna zewnętrzna do tych okręgów jest styczna do okręgów o_1 i o_2 odpowiednio w punktach A i B. Druga wspólna styczna zewnętrzna do tych okręgów jest styczna do okręgów o_1 i o_2 odpowiednio w punktach C i D (rys. 67). Prosta AD przecina okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że $AP = QD$.



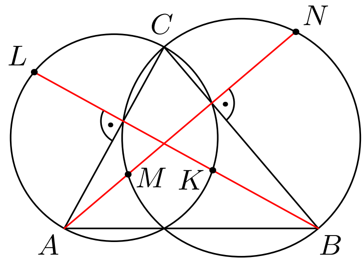
rys. 67

68. Prosta k jest styczna do okręgu o w punkcie A. Odcinek CD jest cięciwą okręgu o równoległą do prostej k (rys. 68). Styczna do okręgu o w punkcie D przecina prostą k w punkcie B. Odcinek BC przecina okrąg o w punkcie E. Dowieść, że prosta DE dzieli odcinek AB na dwie równe części.



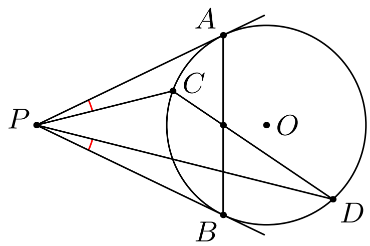
rys. 68

69. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Prosta przechodząca przez punkt B i prostopadła do prostej AC przecina okrąg o średnicy AC w punktach K i L (rys. 69). Prosta przechodząca przez punkt A i prostopadła do prostej BC przecina okrąg o średnicy BC w punktach M i N. Wykazać, że punkty K, L, M i N leżą na jednym okręgu.



rys. 69

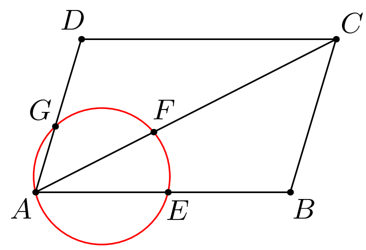
70. Z punktu P leżącego na zewnątrz okręgu o środku O poprowadzono styczne PA i PB (rys. 70). Prosta przechodząca przez środek odcinka AB przecina dany okrąg w punktach C i D. Dowieść, że
(a) punkty C, D, O, P leżą na jednym okręgu;
(b) $\sphericalangle APC = \sphericalangle DPB$.



rys. 70

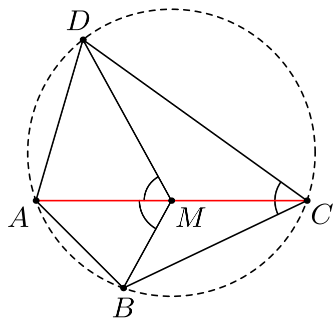
71. Dany jest równoległobok $ABCD$. Pewien okrąg przechodzący przez punkt A przecina odcinki AB, AC, AD odpowiednio w punktach E, F, G (rys. 71). Dowieść, że

$$AB \cdot AE + AD \cdot AG = AC \cdot AF\,.$$



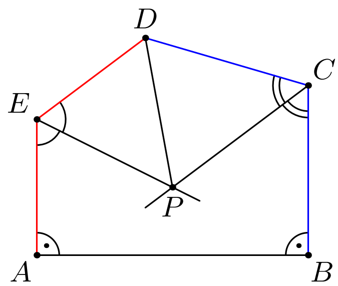
rys. 71

72. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt M jest środkiem przekątnej AC (rys. 72). Wykazać, że jeżeli
$$\sphericalangle BCD = \sphericalangle BMA = \sphericalangle AMD\,,$$
to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.



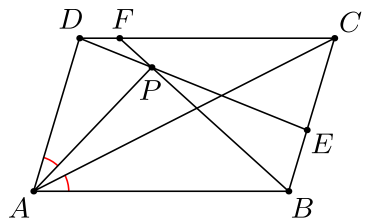
rys. 72

73. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym
$$AE = ED\,,\quad BC = CD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAE = 90^\circ\,.$$
Dwusieczne kątów BCD i AED przecinają się w punkcie P (rys. 73). Dowieść, że $PD^2 = AE \cdot BC$.



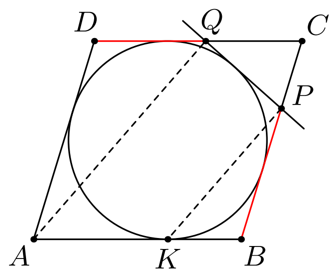
rys. 73

74. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $AB \cdot DF = AD \cdot BE$ (rys. 74). Odcinki DE i BF przecinają się w punkcie P. Wykazać, że $\sphericalangle DAP = \sphericalangle BAC$.



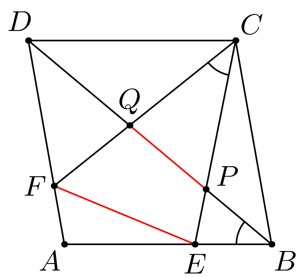
rys. 74

75. Punkty P i Q leżą na bokach BC i CD rombu $ABCD$, przy czym prosta PQ jest styczna do okręgu o wpisanego w dany romb (rys. 75).
(a) Wykazać, że $BP \cdot DQ = \frac{1}{4}BD^2$.
(b) Niech K będzie punktem styczności okręgu o z odcinkiem AB. Dowieść, że proste KP i AQ są równoległe.



rys. 75

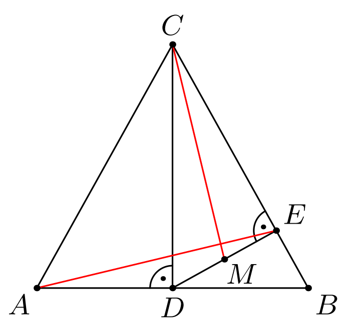
76. Dany jest romb $ABCD$. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i AD, przy czym $\sphericalangle ECF = \sphericalangle ABD$ (rys. 76). Proste EC i FC przecinają odcinek BD odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że wartość ilorazu PQ/EF nie zależy od wyboru punków E i F.



rys. 76

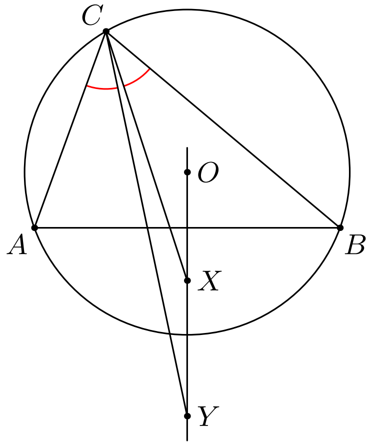
77. Pewien prostokąt można pokryć 25 kołami o promieniu 2. Udowodnić, że ten sam prostokąt można pokryć 100 kołami o promieniu 1.

78. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Punkt D jest środkiem boku AB, a punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą BC. Punkt M jest środkiem odcinka DE (rys. 78). Dowieść, że proste AE i CM są prostopadłe.



rys. 78

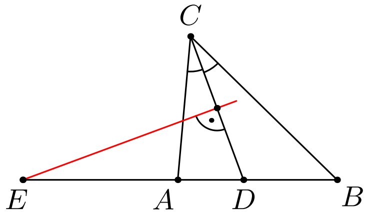
79. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O i promieniu r (rys. 79). Punkty O, X, Y leżą w tej właśnie kolejności na symetralnej odcinka AB oraz wewnątrz kąta ACB, przy czym $OX \cdot OY = r^2$. Wykazać, że $\sphericalangle ACY = \sphericalangle XCB$.



rys. 79

80. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC, przy czym $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCA$. Symetralna odcinka CD przecina prostą AB w punkcie E. Wykazać, że

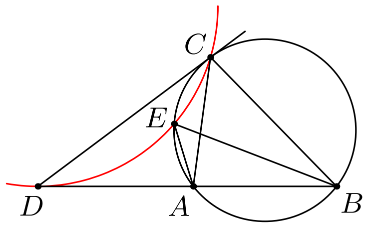
$$\frac{EA}{EB} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2.$$



rys. 80

81. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o_1 (rys. 81). Styczna do tego okręgu w punkcie C przecina prostą AB w punkcie D. Okrąg o_2 styczny do prostej AB w punkcie D przechodzi przez punkt C i przecina okrąg o_1 w różnych punktach C i E. Wykazać, że

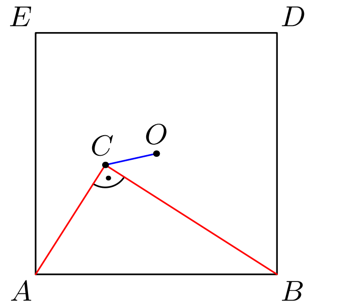
$$\frac{EA}{EB} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^3.$$



rys. 81

Twierdzenie Ptolemeusza

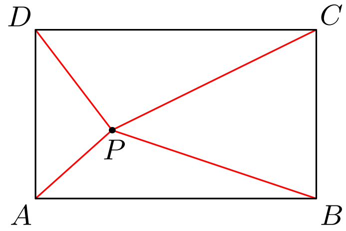
82. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC zbudowano, po jego wewnętrznej stronie, kwadrat $ABDE$ o środku O (rys. 82). Znając długości odcinków AC i BC obliczyć długość odcinka OC.



rys. 82

83. Punkt P leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ (rys. 83). Udowodnić, że pole tego prostokąta jest nie większe od

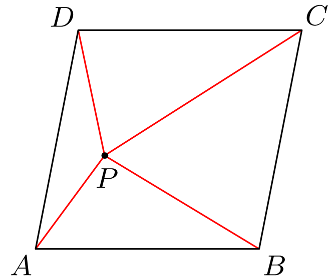
$$AP\cdot PC+BP\cdot PD.$$



rys. 83

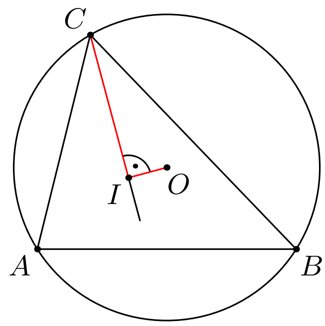
84. Dany jest romb $ABCD$ o boku 1 (rys. 84). Wewnątrz rombu $ABCD$ wyznaczyć zbiór takich punktów P, że

$$AP\cdot PC+BP\cdot PD=1.$$



rys. 84

85. Dany jest trójkąt ABC, w którym spełniona jest równość $AC+BC=2AB$ (rys. 85). Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Wykazać, że jeżeli $O\neq I$, to proste OI i CI są prostopadłe.

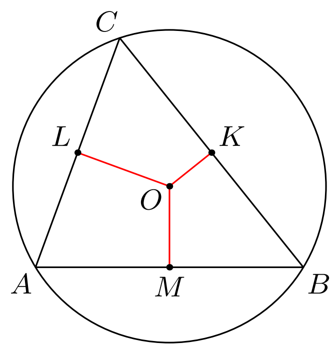


rys. 85

86. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC (rys. 86). Punkty K, L, M są odpowiednio środkami boków BC, CA, AB. Wykazać, że

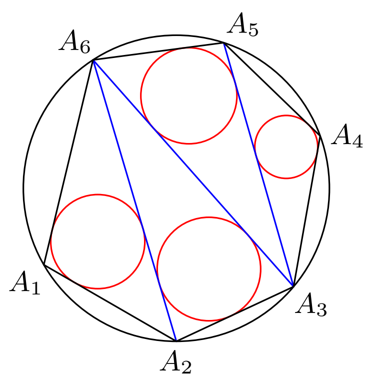
$$OK+OL+OM=R+r,$$

gdzie R, r są odpowiednio promieniami okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt ABC.
Sformułować i udowodnić analogiczne twierdzenie dla trójkąta rozwartokątnego.



rys. 86

87. Dany jest n-kąt wypukły $A_1A_2\ldots A_n$ wpisany w okrąg (zob. rys. 87 dla $n=6$). W wielokącie tym poprowadzono $n-3$ przekątne dzieląc go na $n-2$ trójkąty. Wykazać, że suma promieni okręgów wpisanych w uzyskane trójkąty nie zależy od podziału danego wielokąta.



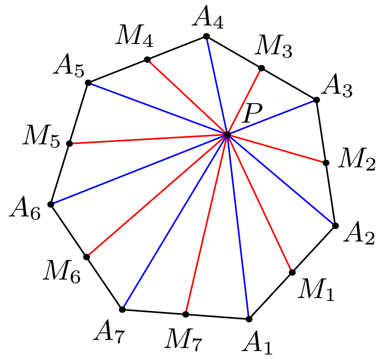
rys. 87

88. Dany jest trójkąt ABC, w którym $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Niech m_a, m_b, m_c będą długościami środkowych poprowadzonych odpowiednio do boków BC, CA, AB. Dowieść, że

$$m_a(bc-a^2)+m_b(ca-b^2)+m_c(ab-c^2)\geqslant 0.$$

89. Dany jest n-kąt foremny $A_1A_2\dots A_n$ (na rys. 89 przyjęliśmy $n=7$). Dla $i=1,2,\dots,n$ punkt M_i jest środkiem odcinka A_iA_{i+1} (przyjmujemy, że $A_{n+1}=A_1$). Punkt P leży wewnątrz danego wielokąta. Dowieść, że

$$\sum_{i=1}^{n} PM_i \geqslant \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\cdot\sum_{i=1}^{n} PA_i\,.$$

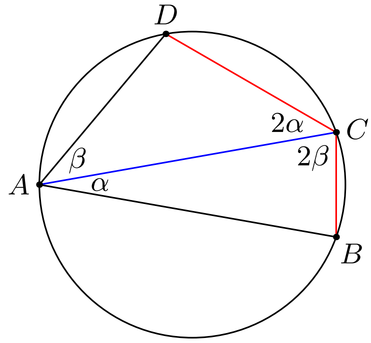


rys. 89

90. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ wpisany w okrąg (rys. 90), przy czym

$$\sphericalangle DCA=2\sphericalangle BAC \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BCA=2\sphericalangle DAC\,.$$

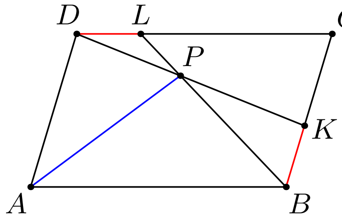
Dowieść, że $BC+CD=AC$.



rys. 90

Twierdzenie o dwusiecznej, okrąg Apolloniusza

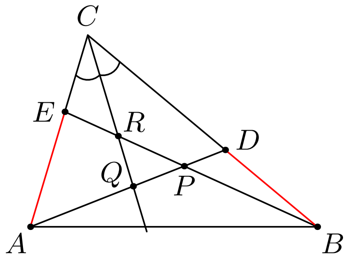
91. Punkt K i L leżą odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $BK = DL$ (rys. 91). Odcinki DK i BL przecinają się w punkcie P. Dowieść, że półprosta AP jest dwusieczną kąta BAD.



rys. 91

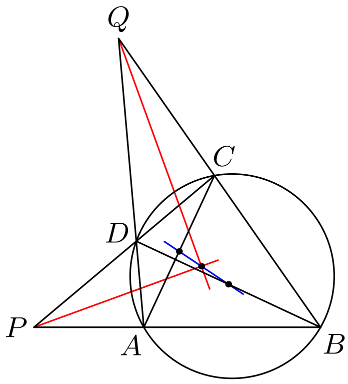
92. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i CA trójkąta ABC, przy czym $BD = AE$ (rys. 92). Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Dwusieczna kąta ACB przecina odcinki AD i BE odpowiednio w punktach Q i R. Wykazać, że jeżeli punkty P, Q, R nie pokrywają się, to

$$\frac{DP}{ER} = \frac{PQ}{RP} = \frac{QA}{PB}.$$



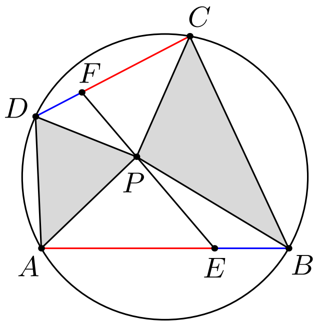
rys. 92

93. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P. Proste AD i BC przecinają się w punkcie Q (rys. 93). Dowieść, że dwusieczne kątów APD i DQC przecinają się na prostej przechodzącej przez środki przekątnych AC i BD.



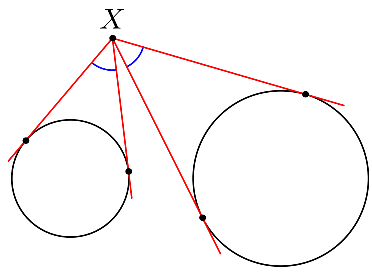
rys. 93

94. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i CD, przy czym $AE : EB = CF : FD$ (rys. 94). Punkt P leży na odcinku EF i spełnia warunek $EP : PF = AB : CD$. Udowodnić, że stosunek pól trójkątów APD i BPC nie zależy od wyboru punktów E i F.



rys. 94

95. Dane są okręgi o_1 i o_2 rozłączne zewnętrznie. Wyznaczyć zbiór takich punktów X, z których okręgi o_1 i o_2 widać pod tym samym kątem (rys. 95).

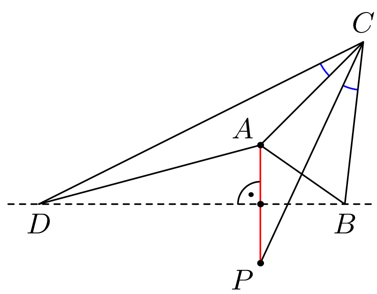


rys. 95

96. W czworokącie $ABCD$ miara kąta wewnętrznego przy wierzchołku A jest większa od 180° oraz zachodzi równość

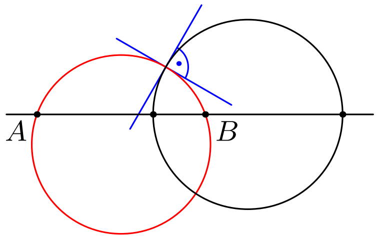
$$AB \cdot CD = AD \cdot BC.$$

Punkt P jest symetryczny do punktu A względem prostej BD (rys. 96). Udowodnić, że $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ACD$.



rys. 96

97. Dane są punkty A i B. Wykazać, że każdy okrąg Apolloniusza dla punktów A i B jest prostopadły do każdego okręgu przechodzącego przez punkty A i B (rys. 97).

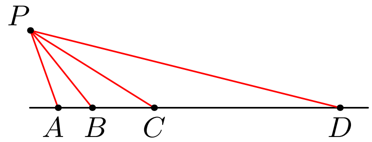


rys. 97

98. Punkty A, B, C, D leżą w tej właśnie kolejności na prostej k (rys. 98), przy czym

$$AB = 1, \quad BC = 2, \quad CD = 6.$$

Rozstrzygnąć, czy istnieje taki punkt P, nie leżący na prostej k, że $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPD$.



rys. 98

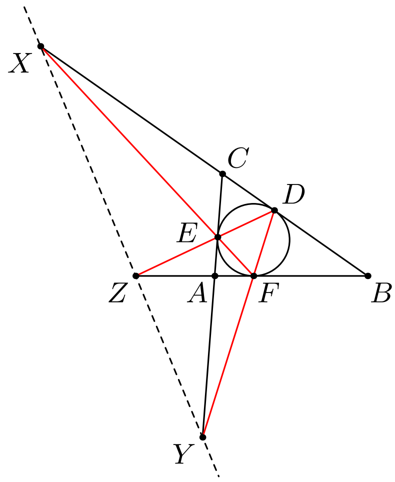
99. W przestrzeni dane są różne punkty A, B oraz C_1, C_2, C_3, przy czym

$$AC_i = 2 \cdot BC_i \quad \text{dla } i = 1, 2, 3$$

oraz $C_1C_3 = \frac{4}{3} \cdot AB$. Udowodnić, że $\sphericalangle C_1C_2C_3 = 90^\circ$ oraz, że punkty A, B, C_1, C_3 leżą w jednej płaszczyźnie.

Twierdzenie Cevy i twierdzenie Menelausa

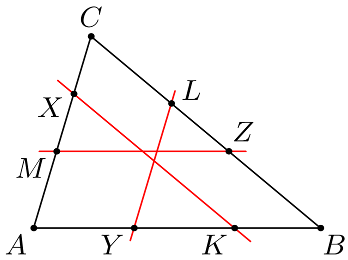
100. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do prostych BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Proste BC i EF przecinają się w punkcie X, proste CA i DF przecinają się w punkcie Y, proste AB i DE przecinają się w punkcie Z (rys. 100). Dowieść, że punkty X, Y, Z leżą na jednej prostej.



rys. 100

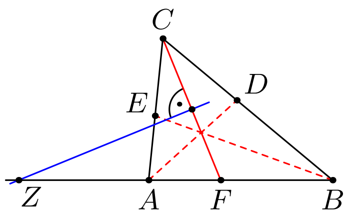
101. Dany jest trójkąt ABC. Punkty L, Z leżą na boku BC, punkty M, X leżą na boku CA, punkty K, Y leżą na boku AB, przy czym $AB \parallel MZ$, $BC \parallel KX$, $CA \parallel LY$ (rys. 101). Dowieść, że proste KX, LY i MZ przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AY}{YK} \cdot \frac{BZ}{ZL} \cdot \frac{CX}{XM} = 1\,.$$



rys. 101

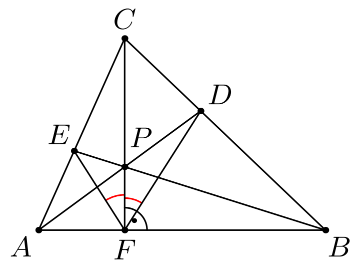
102. Dany jest trójkąt nierównoramienny ABC. Dwusieczne kątów CAB, ABC i BCA przecinają boki BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E, F (rys. 102). Symetralne odcinków AD, BE, CF przecinają proste BC, CA, AB odpowiednio w punktach X, Y, Z. Dowieść, że punkty X, Y, Z leżą na jednej prostej.



rys. 102

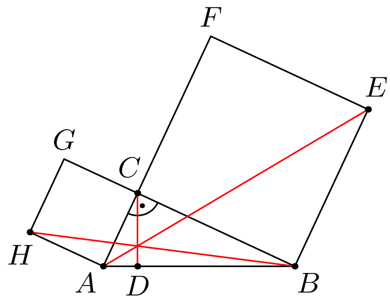
103. Dany jest czworościan $ABCD$. Sfera s jest styczna do krawędzi AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N. Dowieść, że punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

104. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt F jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB (rys. 104). Punkt P należy do odcinka CF. Prosta AP przecina bok BC w punkcie D, a prosta BP przecina bok CA w punkcie E. Udowodnić, że $\sphericalangle DFC = \sphericalangle EFC$.



rys. 104

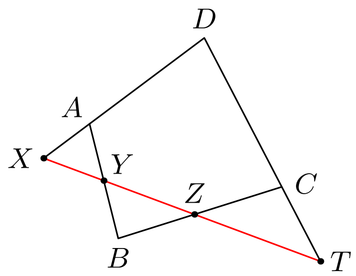
105. Na przyprostokątnych BC i CA trójkąta prostokątnego ABC zbudowano, po zewnętrznej stronie, kwadraty $BEFC$ oraz $CGHA$ (rys. 105). Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB. Wykazać, że proste AE, BH oraz CD przecinają się w jednym punkcie.



rys. 105

106. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Prosta k przecina proste DA, AB, BC oraz CD odpowiednio w punktach X, Y, Z oraz T, jak pokazano na rys. 106. Dowieść, że

$$\frac{DX}{XA}\cdot\frac{AY}{YB}\cdot\frac{BZ}{ZC}\cdot\frac{CT}{TD}=1\,.$$



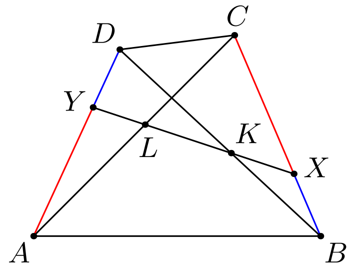
rys. 106

107. Punkty X i Y leżą odpowiednio na bokach BC i DA czworokąta $ABCD$, przy czym

$$\frac{AY}{YD}=\frac{CX}{XB}\,.$$

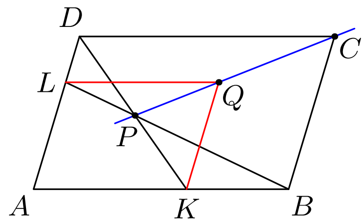
Prosta XY przecina odcinki BD i AC odpowiednio w punktach K i L (rys. 107). Wykazać, że

$$\frac{AL}{LC}=\frac{DK}{KB}\,.$$



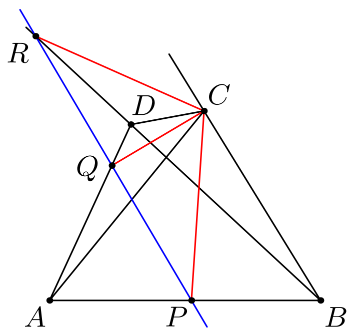
rys. 107

108. Dany jest równoległobok $ABCD$ (rys. 108). Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach AB i AD. Odcinki DK i BL przecinają się w punkcie P. Punkt Q jest takim punktem, że czworokąt $AKQL$ jest równoległobokiem. Udowodnić, że punkty P, Q, C leżą na jednej prostej.



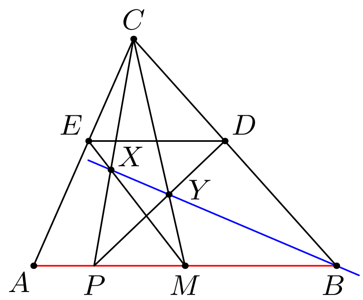
rys. 108

109. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ (rys. 109). Dwusieczne kątów ACB i ACD przecinają odcinki AB i AD odpowiednio w punktach P i Q. Dwusieczna kąta zewnętrznego BCD przecina prostą BD w punkcie R. Dowieść, że punkty P, Q, R leżą na jednej prostej.



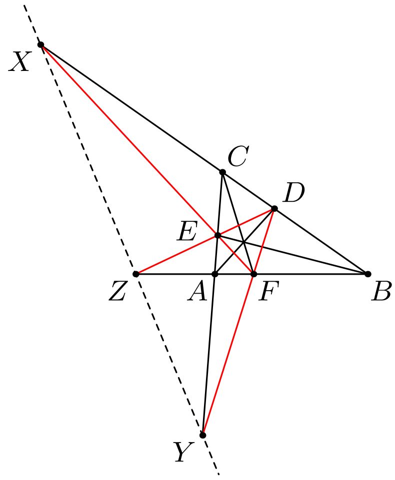
rys. 109

110. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC (rys. 110). Punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach BC i CA, przy czym proste DE i AB są równoległe. Punkt P leży na odcinku AM. Proste EM i CP przecinają się w punkcie X, a proste DP i CM przecinają się w punkcie Y. Wykazać, że punkty X, Y, B leżą na jednej prostej.



rys. 110

111. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Proste BC i EF przecinają się w punkcie X, proste CA i DF przecinają się w punkcie Y, proste AB i DE przecinają się w punkcie Z (rys. 111). Dowieść, że punkty X, Y, Z leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.
(Jest to szczególny przypadek *twierdzenia Desargues'a*.)

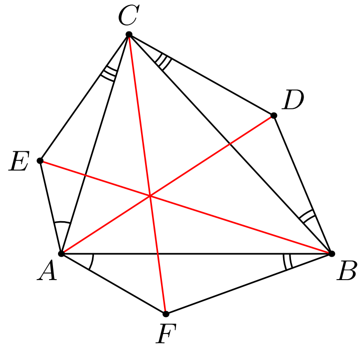


rys. 111

112. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, trójkąty BCD, CAE, ABF, przy czym

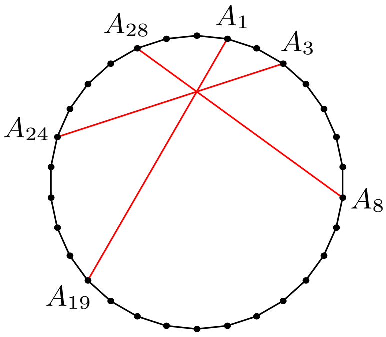
$$\sphericalangle CAE = \sphericalangle FAB\,, \ \sphericalangle FBA = \sphericalangle DBC\,, \ \sphericalangle DCB = \sphericalangle ECA\,.$$

Dowieść, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie (rys. 112).



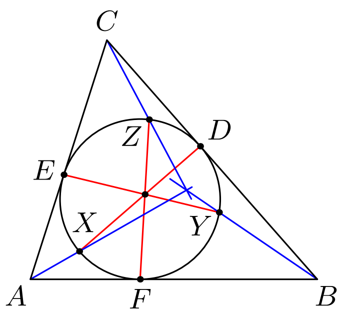
rys. 112

113. Wykazać, że w 30-kącie foremnym przekątne A_1A_{19}, A_3A_{24} oraz A_8A_{28} przecinają się w jednym punkcie (rys. 113).



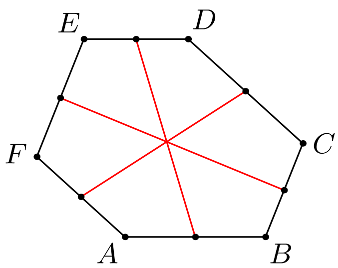
rys. 113

114. Okrąg o wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty X, Y, Z leżą odpowiednio na łukach EF, FD i DE okręgu o (rys. 114). Dowieść, że jeżeli proste DX, EY i CZ przecinają się w jednym punkcie, to również proste AX, BY i CZ przecinają się w jednym punkcie.



rys. 114

115. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym spełnione są zależności $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ oraz $CD \parallel FA$ (rys. 115). Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków sześciokąta $ABCDEF$ przecinają się w jednym punkcie.



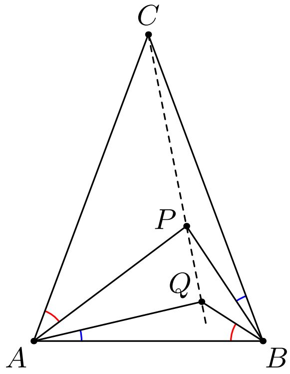
rys. 115

Punkty izogonalnie sprzężone

116. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$ (rys. 116). Punkty P i Q leżą wewnątrz tego trójkąta, przy czym

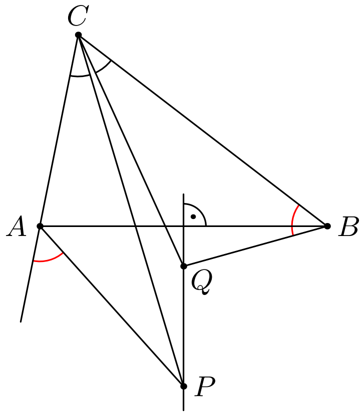
$$\sphericalangle PAC = \sphericalangle ABQ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle PBC = \sphericalangle BAQ\,.$$

Dowieść, że punkty C, P, Q leżą na jednej prostej.



rys. 116

117. Dany jest trójkąt ABC. Punkty P i Q należą do symetralnej odcinka AB i leżą wewnątrz kąta ACB (rys. 117). Dowieść, że jeżeli $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCQ$, to $\sphericalangle PAC + \sphericalangle QBC = 180^\circ$.



rys. 117

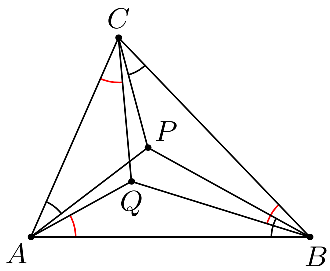
118. Punkty P i Q leżą wewnątrz trójkąta ABC, przy czym

$$\sphericalangle PAC = \sphericalangle PCB = \sphericalangle PBA = \alpha$$

oraz

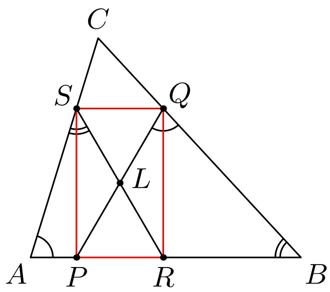
$$\sphericalangle QAB = \sphericalangle QBC = \sphericalangle QCA = \beta\,.$$

Dowieść, że $\alpha = \beta$ (rys. 118).



rys. 118

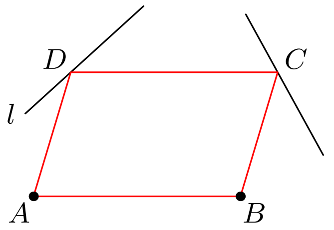
119. W trójkącie ABC punkt L jest punktem Lemoine'a. Przez punkt L poprowadzono prostą przecinającą odcinki AB i BC odpowiednio w punktach P i Q, przy czym $\sphericalangle PQB = \sphericalangle BAC$ (rys. 119). Przez punkt L poprowadzono również prostą przecinającą odcinki AB i AC odpowiednio w punktach R i S, przy czym $\sphericalangle RSA = \sphericalangle ABC$. Wykazać, że czworokąt $PRQS$ jest prostokątem.



rys. 119

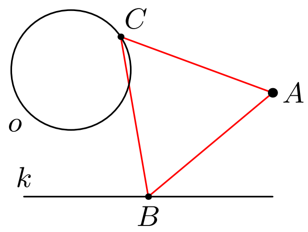
Izometrie, składanie izometrii

120. Dane są punkty A, B oraz proste k i l (rys. 120). Skonstruować takie punkty C, D leżące odpowiednio na prostych k, l, aby czworokąt $ABCD$ był równoległobokiem.



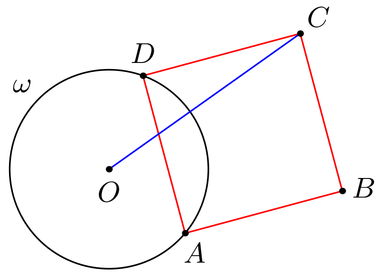
rys. 120

121. Dany jest punkt A, prosta k oraz okrąg o (rys. 121). Skonstruować takie punkty B i C leżące odpowiednio na prostej k i okręgu o, że trójkąt ABC jest równoboczny.



rys. 121

122. Dany jest okrąg ω o środku O i promieniu 1 (rys. 122). Rozpatrujemy wszystkie kwadraty $ABCD$, których wierzchołki A i D leżą na okręgu ω. Wyznaczyć największą wartość długości odcinka OC.



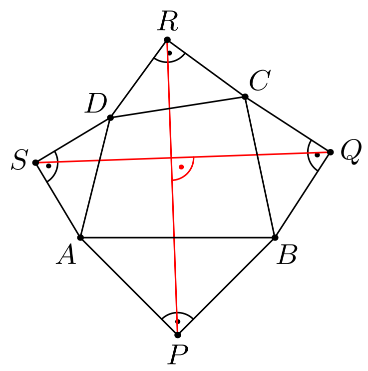
rys. 122

123. Dane są cztery różne punkty A, B, C, D. Dowieść, że jeżeli

$$R(D,90^\circ)\circ R(C,90^\circ)\circ R(B,90^\circ)\circ R(A,90^\circ)=\mathrm{Id}\,,$$

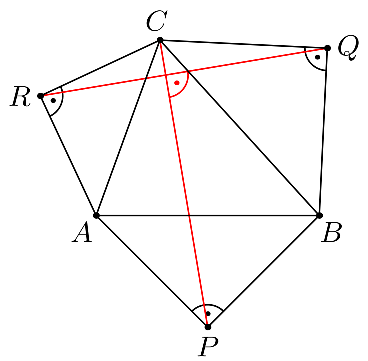
to odcinki AC i BD prostopadłe i równej długości.

124. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Na jego bokach zbudowano, po zewnętrznej stronie, trójkąty prostokątne równoramienne ABP, BCQ, CDR i DAS (rys. 124). Wykazać, że odcinki PR i QS są prostopadłe i równej długości.



rys. 124

125. Dany jest trójkąt ABC. Na jego bokach zbudowano, po zewnętrznej stronie, trójkąty prostokątne równoramienne ABP, BCQ, CAR (rys. 125). Wykazać, że odcinki PC i QR są prostopadłe i równej długości.

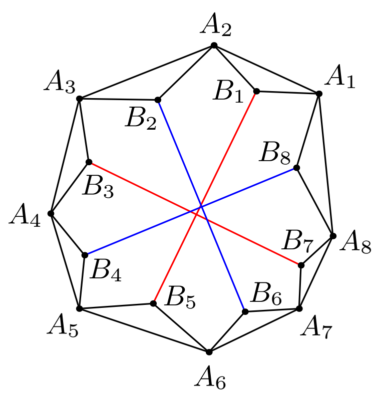


rys. 125

126. Dany jest ośmiokąt wypukły $A_1A_2\ldots A_8$. Na każdym boku A_iA_{i+1} tego ośmiokąta zbudowano, po jego wewnętrznej stronie, trójkąty równoramienne $A_iB_iA_{i+1}$, przy czym

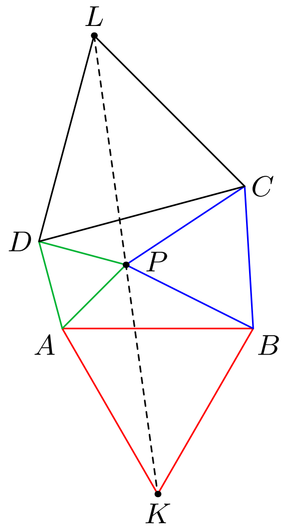
$$\measuredangle A_iB_iA_{i+1}=135^\circ\,,\quad \text{dla } i=1,2,\ldots,8,$$

gdzie $A_9=A_1$ (rys. 126). Dowieść, że jeżeli odcinki B_1B_5 i B_3B_7 są prostopadłe i równej długości, to również odcinki B_2B_6 i B_4B_8 są prostopadłe i równej długości.



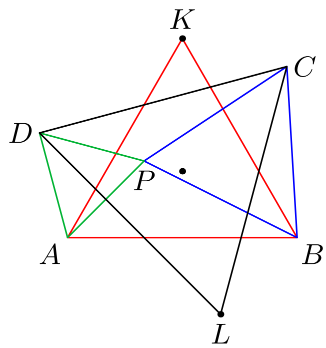
rys. 126

127. Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym trójkąty BCP i DAP są równoboczne (rys. 127). Na bokach AB i CD tego czworokąta zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, trójkąty równoboczne ABK i CDL. Dowieść, że punkt P jest środkiem odcinka KL.



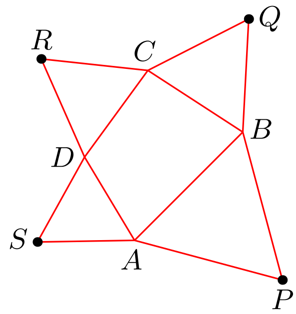
rys. 127

128. Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym trójkąty BCP i DAP są równoboczne (rys. 128). Na bokach AB i CD tego czworokąta zbudowano, po jego wewnętrznej stronie, trójkąty równoboczne ABK i CDL. Dowieść, że środki ciężkości trójkątów ABK i CDL pokrywają się.



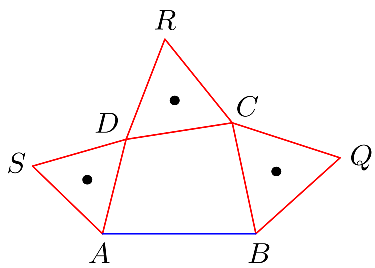
rys. 128

129. Na bokach czworokąta wypukłego $ABCD$ zbudowano, po jego zewnętrznej stronie trójkąty równoboczne ABP, BCQ, CDR, DAS (rys. 129). Rozstrzygnąć, czy znając punkty P, Q, R, S można jednoznacznie odtworzyć położenie punktów A, B, C, D. Jeśli tak, to podać konstrukcję tych punktów.



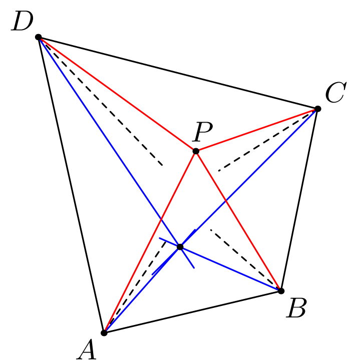
rys. 129

130. Na bokach czworokąta wypukłego $ABCD$ zbudowano, po jego zewnętrznej stronie trójkąty równoboczne BCQ, CDR, DAS (rys. 130). Rozstrzygnąć, czy znając środki ciężkości trójkątów BCQ, CDR, DAS można jednoznacznie odtworzyć:
(a) długość boku AB,
(b) położenie punktów A, B, C, D.
Jeśli tak, to podać odpowiednią konstrukcję.



rys. 130

131. Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym $\sphericalangle APB + \sphericalangle CPD = 180^\circ$ (rys. 131). Niech a, b, c, d będą prostymi symetrycznymi odpowiednio do prostych AP, BP, CP, DP względem dwusiecznych kątów DAB, ABC, BCD, CDA. Dowieść, że proste a, b, c, d przecinają się w jednym punkcie.

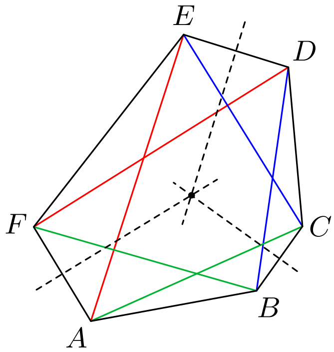


rys. 131

132. Dane są punkty $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. Udowodnić, że istnieje łamana zamknięta $B_1B_2\ldots B_{2n}$ taka, że dla $j = 1, 2, \ldots, 2n$ punkt A_j jest środkiem odcinka B_jB_{j+1} (gdzie $B_{2n+1} = B_1$) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_{2i-1}A_{2i}} = 0.$$

133. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą następujące równości: $AC = FB$, $BD = CE$, $DF = EA$ (rys. 133). Dowieść, że symetralne boków BC, DE, FA przecinają się w jednym punkcie.



rys. 133

134. Dane są takie różne punkty A, B, C, że odwzorowanie

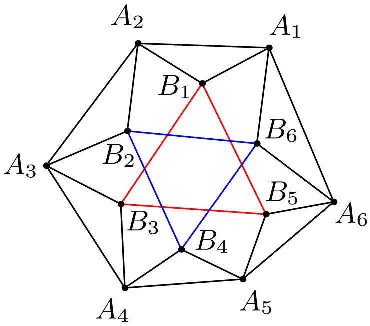
$$R(C,256^\circ) \circ R(B,244^\circ) \circ R(A,220^\circ)$$

ma punkt stały. Wyznaczyć miary kątów trójkąta ABC.

135. Dane są różne punkty A, B, C oraz kąty $0 < \alpha, \beta, \gamma < 360^\circ$, przy czym $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$. Wiedząc, że odwzorowanie

$$R(C,\gamma) \circ R(B,\beta) \circ R(A,\alpha)$$

ma punkt stały, wyznaczyć miary kątów trójkąta ABC.

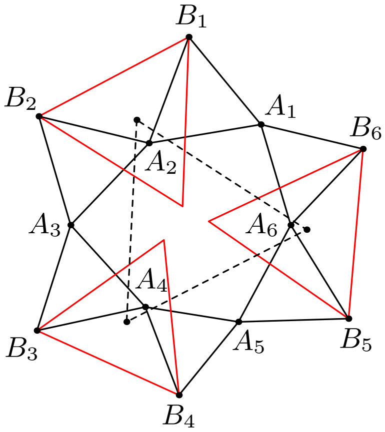


rys. 136

136. Dany jest sześciokąt wypukły $A_1A_2\ldots A_6$. Na każdym boku A_iA_{i+1} tego sześciokąta zbudowano, po jego wewnętrznej stronie, trójkąty równoramienne $A_iB_iA_{i+1}$, przy czym

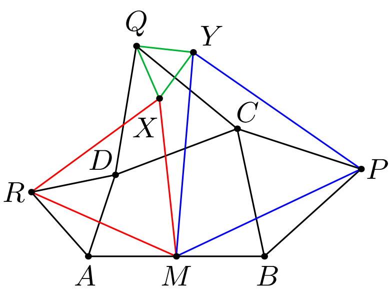
$$\sphericalangle A_iB_iA_{i+1} = 120^\circ, \quad \text{dla } i = 1,2,\ldots,6,$$

gdzie $A_7 = A_1$ (rys. 136). Dowieść, że jeżeli trójkąt $B_1B_3B_5$ jest równoboczny, to trójkąt $B_2B_4B_6$ także jest równoboczny.



rys. 137

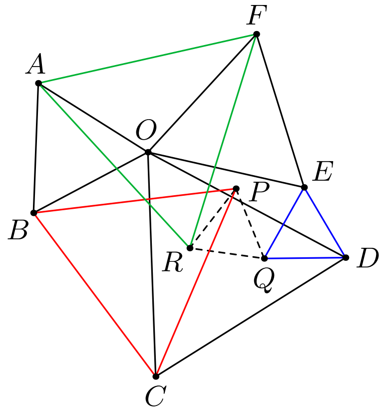
137. Dany jest sześciokąt wypukły $A_1A_2\ldots A_6$. Na każdym boku A_iA_{i+1} tego sześciokąta zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, trójkąty równoboczne $A_iB_iA_{i+1}$ (rys. 137). Następnie na odcinkach B_1B_2, B_3B_4, B_5B_6 zbudowano, do wewnątrz sześciokąta $B_1B_2\ldots B_6$ trójkąty równoboczne. Wykazać, że środki tych trzech trójkątów równobocznych są wierzchołkami trójkąta równobocznego.



rys. 138

138. Na bokach BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$ zbudowano po jego zewnętrznej stronie trójkąty równoboczne BCP, CDQ, DAR (rys. 138). Punkt M jest środkiem odcinka AB. Na odcinkach RM i MP zbudowano trójkąty równoboczne RMX i MPY leżące po tej samej stronie prostej AB, co punkty C i D. Udowodnić, że trójkąt XYQ jest równoboczny.

139. Dany jest taki sześciokąt $ABCDEF$, że trójkąty równoboczne zbudowane na bokach AB, CD, EF (skierowane do wewnątrz sześciokąta) mają wspólny wierzchołek O (rys. 139). Niech BCP, DEQ oraz FAR będą trójkątami równobocznymi skierowanymi do wewnątrz sześciokąta $ABCDEF$. Wykazać, że trójkąt PQR jest równoboczny.

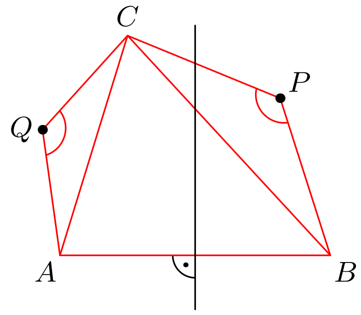


rys. 139

140. Na bokach BC i CA nierównoramiennego trójkąta ABC zbudowano po jego zewnętrznej stronie trójkąty BPC i CQA (rys. 140), przy czym $BP = PC$, $CQ = QA$ oraz

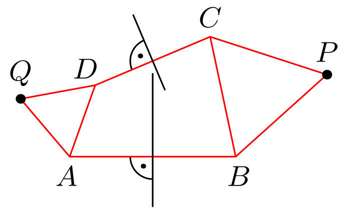
$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle CQA = \alpha .$$

Rozstrzygnąć, czy znając punkty P, Q oraz symetralną odcinka AB można odtworzyć jednoznacznie
(a) miarę kąta α, (b) położenie punktów A, B, C.
Jeśli tak, to podać odpowiednią konstrukcję.



rys. 140

141. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, który nie jest trapezem. Na bokach BC i DA zbudowano, po zewnętrznej stronie czworokąta $ABCD$, trójkąty równoboczne BCP i ADQ (rys. 141). Rozstrzygnąć, czy znając punkty P, Q oraz symetralne odcinków AB i CD można jednoznacznie odtworzyć położenie punktów A, B, C, D. Jeśli tak, to podać konstrukcję.

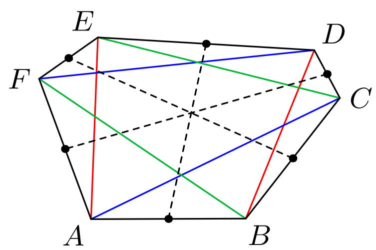


rys. 141

142. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym

$$AC = DF, \quad CE = FB \quad \text{oraz} \quad EA = BD .$$

Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie (rys. 142).



rys. 142

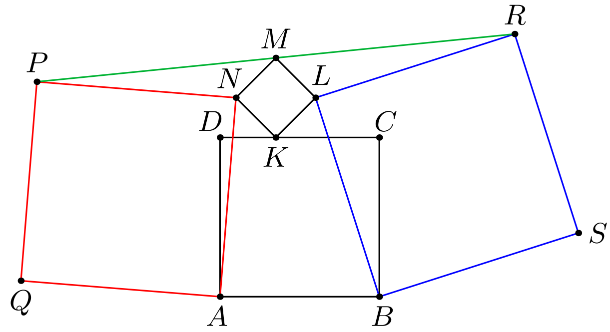
143. Niech $0 < \alpha < 360°$. Wykazać, że odwzorowanie

$$R(A, \alpha) \circ S(k)$$

ma punkt stały wtedy i tylko wtedy, gdy punkt A należy do prostej k.

144. Wykazać, że wszystkie osie symetrii zbioru ograniczonego przecinają się w jednym punkcie.

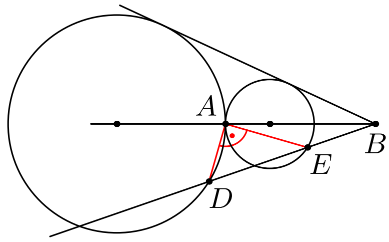
145. Punkt K leży na boku CD kwadratu $ABCD$ (rys. 145). Przekątna KM kwadratu $KLMN$ jest prostopadła do prostej CD oraz $KM = \frac{1}{2}CD$. Czworokąty $ANPQ$ oraz $BLRS$ są kwadratami, jak pokazano na rysunku 145. Wykazać, że punkt M jest środkiem odcinka PR.



rys. 145

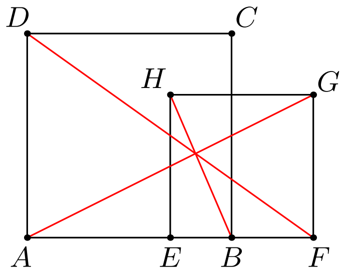
Jednokładność

146. Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie w punkcie A. Wspólna styczna zewnętrzna okręgów o_1 i o_2 przecina prostą łączącą ich środki w punkcie B. Prosta przechodząca przez punkt B przecina okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach D i E, jak pokazano na rysunku 146. Dowieść, że $\sphericalangle DAE = 90°$.



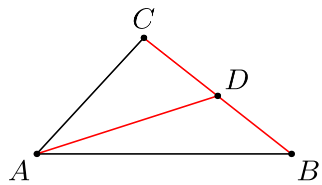
rys. 146

147. Dany jest kwadrat $ABCD$ oraz punkty E i F leżące na prostej AB (rys. 147). Niech $EFGH$ będzie kwadratem leżącym po tej samej stronie prostej AB, co punkty C i D. Wykazać, że proste AG, BH i DF przecinają się w jednym punkcie.



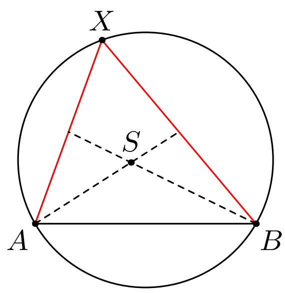
rys. 147

148. Skonstruować trójkąt znając długości dwóch jego boków oraz wiedząc, że długość środkowej poprowadzonej do boku trzeciego jest równa długości tego boku (rys. 148).



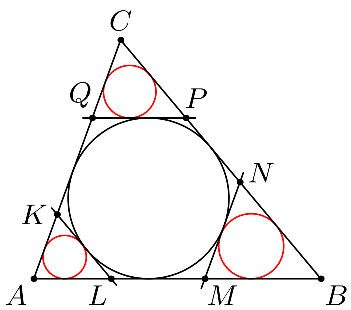
rys. 148

149. Dany jest okrąg o oraz punkty A i B leżące na nim. Punkt X leży na okręgu o (rys. 149). Wyznaczyć zbiór środków ciężkości trójkątów ABX, odpowiadającym różnym położeniom punktu X na okręgu o.



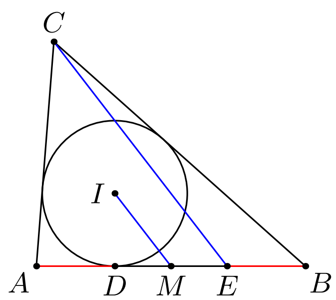
rys. 149

150. Okrąg o jest wpisany w trójkąt ABC. Styczne do okręgu o, równoległe do prostych BC, CA, AB odcinają od trójkąta ABC trzy trójkąty: AKL, BMN i CPQ (rys. 150). Wykazać, że suma promieni okręgów wpisanych w trójkąty AKL, BMN i CPQ jest równa promieniowi okręgu wpisanego w trójkąt ABC.



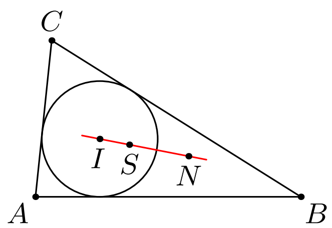
rys. 150

151. Okrąg o środku I wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AB w punkcie D (rys. 151). Punkt E leży na boku AB, przy czym $AD = BE$. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Dowieść, że proste IM i CE są równoległe.



rys. 151

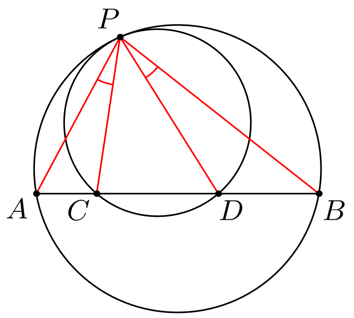
152. Wykazać, że w dowolnym trójkącie ABC, środek okręgu wpisanego I, środek ciężkości S oraz punkt Nagela N leżą na jednej prostej oraz $SN = 2 \cdot IS$ (rys. 152).



rys. 152

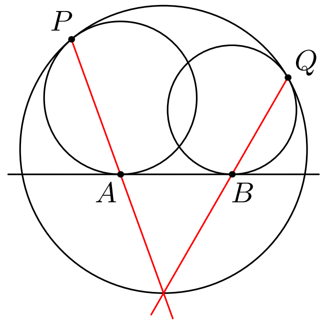
153. W sześciokącie wypukłym każda z głównych przekątnych dzieli ten sześciokąt na dwa czworokąty o równych polach. Dowieść, że przekątne te przecinają się w jednym punkcie.

154. Okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie w punkcie P. Prosta k przecina okrąg o_1 w punktach A i B, a okrąg o_2 w punktach C i D (rys. 154). Udowodnić, że $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPD$.



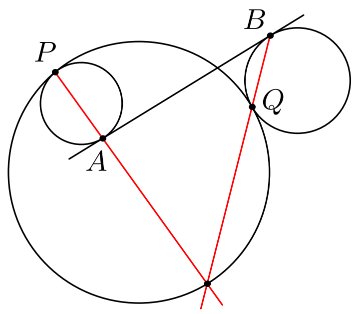
rys. 154

155. Okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu o odpowiednio w punktach P i Q (rys. 155). Wspólna styczna zewnętrzna okręgów o_1 i o_2 jest styczna do tych okręgów odpowiednio w punktach A i B. Dowieść, że proste PA i QB przecinają się w punkcie leżącym na okręgu o.



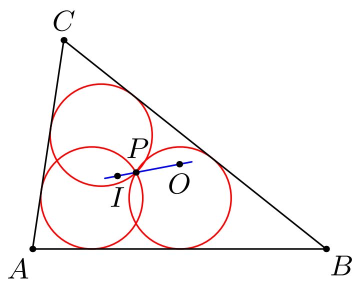
rys. 155

156. Okrąg o_1 jest styczny wewnętrznie do okręgu o w punkcie P, a okrąg o_2 jest styczny zewnętrznie do okręgu o w punkcie Q (rys. 156). Wspólna styczna wewnętrzna okręgów o_1 i o_2 jest styczna do tych okręgów odpowiednio w punktach A i B. Dowieść, że proste PA i QB przecinają się w punkcie leżącym na okręgu o.



rys. 156

157. Dany jest trójkąt ABC. Trzy okręgi o jednakowym promieniu p mają punkt wpólny P oraz każdy z nich jest styczny do dwóch boków trójkąta ABC (rys. 157). Udowodnić, że środek I okręgu wpisanego w trójkąt ABC, punkt P oraz środek O okręgu opisanego na trójkącie ABC leżą na jednej prostej. Wyrazić promień p w zależności od promieni r i R okręgów wpisanego i opisanego na trójkącie ABC.

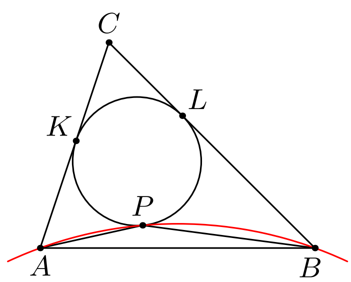


rys. 157

158. Okrąg o leży wewnątrz trójkąta ABC i jest styczny do boków AC i BC tego trójkąta odpowiednio w punktach K i L (rys. 158). Punkt P leży na okręgu o, przy czym

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AK}{BL}\,.$$

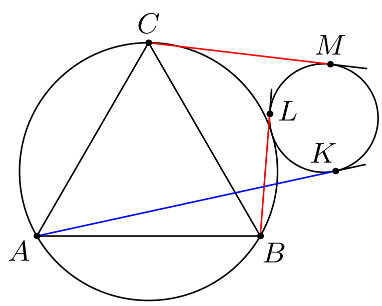
Wykazać, że okrąg opisany na trójkącie ABP jest styczny do okręgu o.



rys. 158

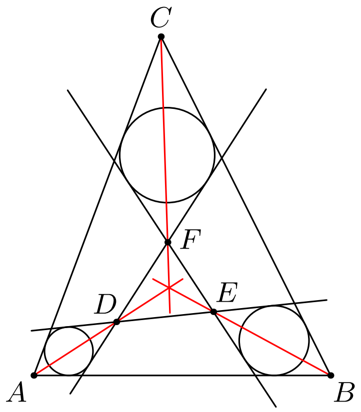
159. Trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg o. Okrąg ω jest styczny zewnętrznie do okręgu o w punkcie leżącym na łuku BC okręgu o (rys. 159). Z punktów A, B, C poprowadzono styczne do okręgu ω odpowiednio w punktach K, L, M. Dowieść, że

$$BL + CM = AK\,.$$



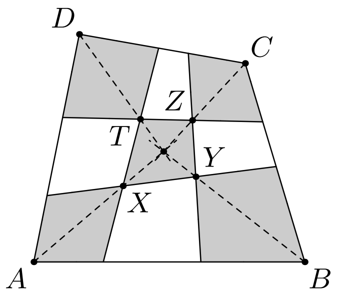
rys. 159

160. Trzy okręgi leżą wewnątrz trójkąta ABC i każdy z nich jest styczny do dwóch boków tego trójkąta, jak na rys. 160. Do każdej pary z tych okręgów poprowadzono styczną zewnętrzną, różną od prostych AB, BC i CA. Punkty przecięcia tych stycznych oznaczono odpowiednio przez D, E i F. Udowodnić, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.



rys. 160

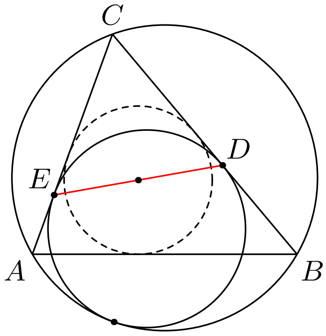
161. Czworokąt wypukły $ABCD$ podzielono na dziewięć czworokątów wypukłych, jak pokazano na rysunku 161. Wykazać, że jeśli w zacieniowane czworokąty można wpisać okręgi, to proste AX, BY, CZ, DT przecinają się w jednym punkcie.



rys. 161

Twierdzenie Pascala

162. Okrąg o jest styczny wewnętrznie do okręgu opisanego na trójkącie ABC oraz do odcinków BC i CA odpowiednio w punktach D i E (rys. 162). Wykazać, że środek odcinka DE pokrywa się ze środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

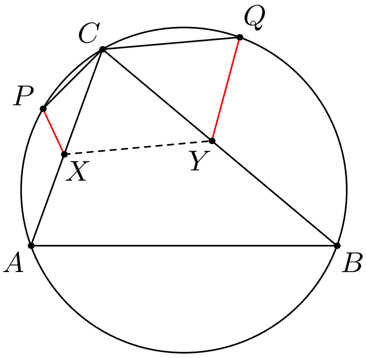


rys. 162

163. Okrąg o jest opisany na trójkącie ABC (rys. 163). Punkty P i Q leżą odpowiednio na tych łukach CA i BC okręgu o, które nie zawierają punktów B i A. Punkty X i Y leżą odpowiednio na odcinkach AC i BC, przy czym

$$\sphericalangle XPC + \sphericalangle YQC = 180^\circ .$$

Wykazać, że wszystkie proste XY, odpowiadające różnym położeniom punktów X i Y (przy ustalonych punktach A, B, C, P, Q) mają punkt wspólny.

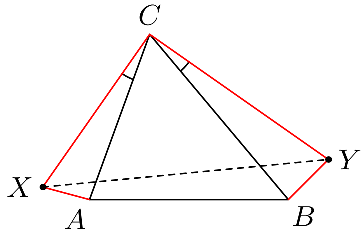


rys. 163

164. Dany jest trójkąt ABC (rys. 164). Niech AXC i BYC będą takimi trójkątami zbudowanymi na zewnątrz trójkąta ABC, że

$$\sphericalangle CAX + \sphericalangle CBY = 180^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ACX = \sphericalangle BCY = 15^\circ .$$

Udowodnić, że wszystkie proste XY, odpowiadające różnym położeniom punktów X i Y, mają punkt wspólny.

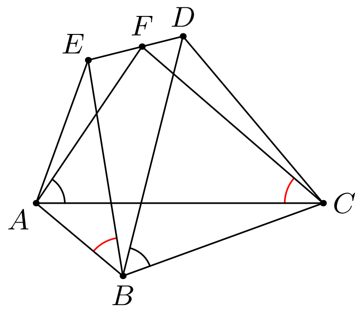


rys. 164

165. Punkt F leży na boku DE pięciokąta wypukłego $ABCDE$ (rys. 165), przy czym

$$\sphericalangle FAC = \sphericalangle DBC \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle FCA = \sphericalangle EBA .$$

Wykazać, że $\sphericalangle BAE + \sphericalangle BCD = 180^\circ$.



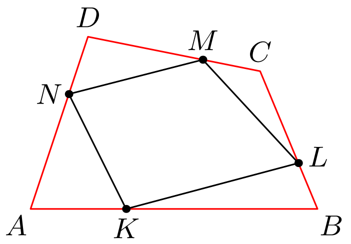
rys. 165

Składanie podobieństw

166. Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$ (rys. 166), przy czym

$$\frac{AK}{KB}=\frac{BL}{LC}=\frac{CM}{MD}=\frac{DN}{NA}=\frac{1}{2}.$$

Rozstrzygnąć, czy znając punkty K, L, M, N można jednoznacznie odtworzyć położenie punktów A, B, C, D. Jeśli tak, to podać konstrukcję.

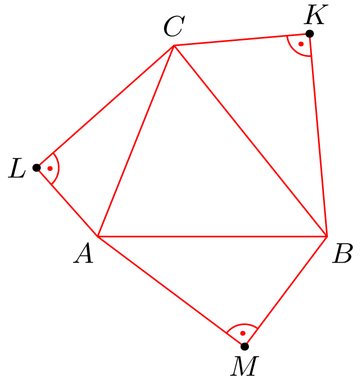


rys. 166

167. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie trójkąty BCK, CAL, ABM (rys. 167), przy czym $\sphericalangle BKC=\sphericalangle CLA=\sphericalangle AMB=90^\circ$ oraz

$$\frac{BK}{KC}=\frac{3}{2},\qquad \frac{CL}{LA}=2,\qquad \frac{AM}{MB}=\frac{4}{3}.$$

Rozstrzygnąć, czy znając punkty K, L, M można jednoznacznie odtworzyć położenie punktów A, B, C. Jeśli tak, to podać konstrukcję.

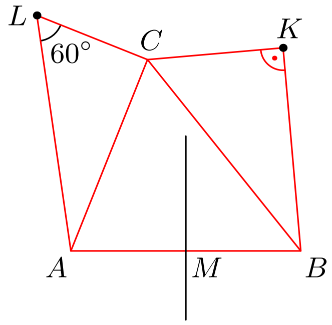


rys. 167

168. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie trójkąty BCK, CAL (rys. 168), przy czym $\sphericalangle BKC=90^\circ$, $\sphericalangle CLA=60^\circ$ oraz

$$\frac{BK}{KC}=\frac{3}{2},\qquad \frac{CL}{LA}=\frac{1}{2}.$$

Rozstrzygnąć, czy znając punkty K, L oraz symetralną odcinka AB można jednoznacznie odtworzyć położenie punktów A, B, C. Jeśli tak, to podać konstrukcję.

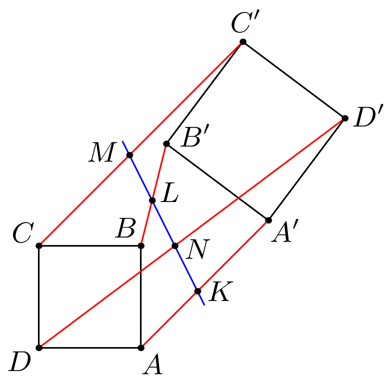


rys. 168

169. Na płaszczyźnie dane są kwadraty $ABCD$ oraz $A'B'C'D'$, przeciwnie zorientowane o bokach odpowiednio długości a i b (rys. 169). Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na odcinkach AA', BB', CC', DD', przy czym

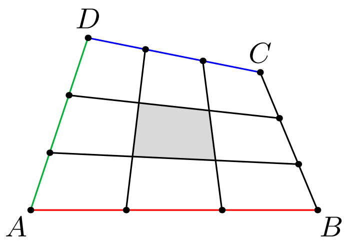
$$\frac{AK}{KA'}=\frac{BL}{LB'}=\frac{CM}{MC'}=\frac{DN}{ND'}=\frac{a}{b}.$$

Dowieść, że punkty K, L, M, N leżą na jednej prostej.



rys. 169

170. Czworokąt wypukły $ABCD$ podzielono na dziewięć czworokątów wypukłych, dzieląc każdy bok czworokąta na trzy równe części, jak pokazano na rysunku 170. Dowieść, że pole zacieniowanego czworokąta jest równe 1/9 pola czworokąta $ABCD$.



rys. 170

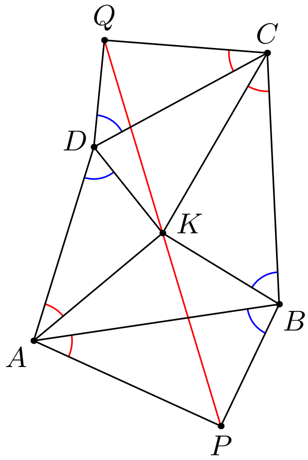
171. Punkt K leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ (rys. 171), przy czym

$$\sphericalangle KAD = \sphericalangle KCB = \alpha \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle KBC = \sphericalangle KDA = \beta\,.$$

Na bokach AB i CD zbudowowano, po zewnętrznej stronie czworokąta $ABCD$, trójkąty ABP i CDQ, przy czym

$$\sphericalangle PAB = \sphericalangle QCD = \alpha \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle PBA = \sphericalangle QDC = \beta\,.$$

Wykazać, że punkt K jest środkiem odcinka PQ.

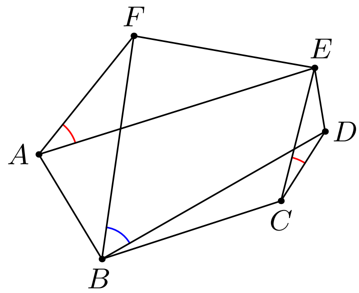


rys. 171

172. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$ (rys. 172), w którym

$$\sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F = 360^\circ \quad \text{oraz} \quad \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1\,.$$

Wykazać, że $\sphericalangle EAF + \sphericalangle ECD = \sphericalangle FBD$.

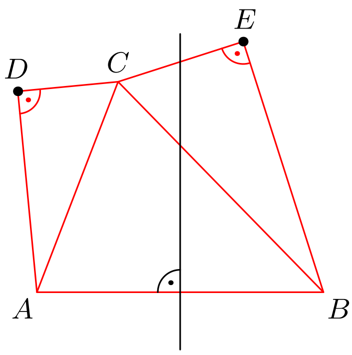


rys. 172

173. Na bokach AC i BC trójkąta ABC, w którym $AC \neq BC$ zbudowano, po jego zewnętrznej stronie (rys. 173), takie trójkąty ACD i EBC, że $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BEC = 90^\circ$ oraz

$$\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC}\,.$$

Rozstrzygnąć, czy znając symetralną k odcinka AB oraz położenie punktów D i E można jednoznacznie odtworzyć:
(a) środek odcinka AB;
(b) odległość punktu C od prostej k.
Jeśli tak, to podać odpowiednią kostrukcję.



rys. 173